FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Física

Física I -2009/2010

11ª Série - Gravitação - Resolução

Questões:

Q1 - Faça uma estimativa do módulo da força gravítica entre duas pessoas que distam de 1 m.

Vamos supor que a massa de cada uma das pessoas é $m = 70\,\mathrm{kg}$. O módulo da força gravítica exercida por uma das pessoas na outra é

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{m^2}{d^2}.$$

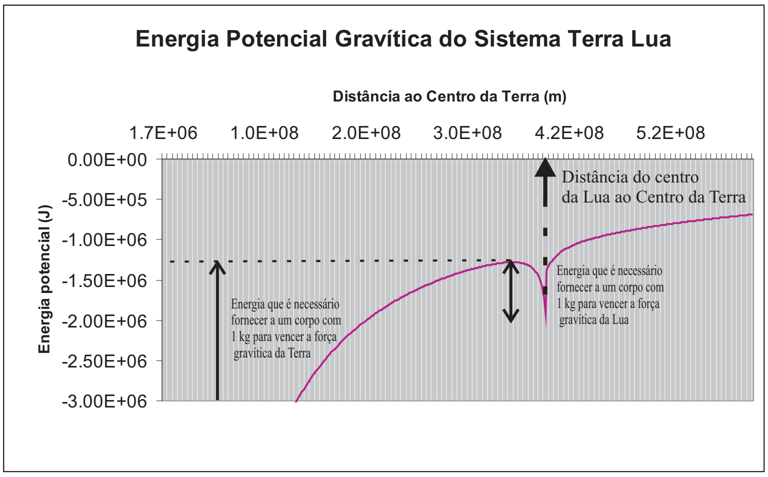
Substituindo $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$; $m = 70\,\mathrm{kg}$ e $d = 1\,\mathrm{m}$, obtemos

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{g}} &= 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \frac{(70\,\mathrm{kg})^2}{(1\,\mathrm{m})^2} \\ &= 3.27 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Como o peso da cada pessoa é $P = 700\,\mathrm{N}$, o módulo da força gravítica exercida por uma das pessoas na outra é 10 ordens de graneza inferior ao peso.

Q2 - Explique por que é que é necessário mais combustível para viajar da Terra para a Lua do que da Lua para a Terra.

Um gráfico da energia potencial gravítica do sistema Terra-Lua é o seguinte



Para se viajar da Terra para a Lua é necessária fornecer à nave espacial energia suficiente para vencer a barreira de energia potencial gravítico do sistema nave+Terra+Lua.

Numa aproximação simples, que ignora os movimentos relativos da Lua e da Terra, bem como os movimentos de rotação destes planetas em torno dos seus eixos, a energia potencial gravítica de uma nave com massa m , numa posição à distância r do centro da Terra, é

$$U_{\mathrm{g}} = -Gm\left(\frac{M_{\mathrm{T}}}{r} + \frac{M_{\mathrm{L}}}{|r - R_{\mathrm{OL}}|}\right),$$

em que M_T e M_L são as massas da Terra e da Lua, respectivamente e R_OL é o raio da órbita da Lua. Esta expressão é válida para $R_\mathrm{T} < r$ e $R_\mathrm{OL} - R_\mathrm{L} < r < R_\mathrm{OL} + R_\mathrm{L}$, em que R_T e R_L são, respectivamente, os raios da Terra e da Lua. O gráfico acima mostra a forma desta curva. Para se viajar da Terra à Lua é necessário fornecer ao veículo a energia necessária para vencer a 1.^{a} barreira de energia potencial.

À superfície da Terra, a energia potencial do sistema (supondo $m = 1\,\mathrm{kg}$) é $-2.35 \times 10^8\,\mathrm{J}$. Essa barreira de potencial tem uma altura de cerca de $-1.28 \times 10^6\,\mathrm{J}$ (é portanto necessário fornecer ao veículo uma energia igual a $-1.28 \times 10^6\,\mathrm{J} - \left(-2.35 \times 10^8\,\mathrm{J}\right) = 2.34 \times 10^8\,\mathrm{J}$ por cada kg de massa) e o seu máximo encontra-se à distância de aproximadamente $3.46 \times 10^8\,\mathrm{m}$ do centro da Terra. Por outro lado, para regressar à Terra, é necessário vencer a mesma barreira de energia potencial, mas partindo da Lua. À superfície da Lua, a energia potencial é $-4.54 \times 10^6\,\mathrm{J}$, pelo que a energia a fornecer por cada kg de massa é agora $-1.28 \times 10^6\,\mathrm{J} - \left(-4.54 \times 10^6\,\mathrm{J}\right) = 3.26 \times 10^6\,\mathrm{J}$.

É esta a razão por que foi necessário um foguetão saturno para enviar as tripulações Apollo para Lua e bastou um pequeno foguete para as fazer regressar de volta para a Terra.

Nota - Estes números foram obtidos com uma folha de cálculo, utilizando os seguintes dados:
$G = 6.67259 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
$M_\mathrm{T} = 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
$M_\mathrm{L} = 7.55 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
$R_\mathrm{OL} = 3.84 \times 10^8\,\mathrm{m}$
$R_\mathrm{T} = 1.70 \times 10^6\,\mathrm{m}$
$R_\mathrm{L} = 6.40 \times 10^6\,\mathrm{m}$

Q3 - Explique por que é que o trabalho efectuado pela força gravítica do Sol sobre um planeta, que se move em torno do Sol numa órbita circular, é nulo.

Q4- Explique por que é que a força exercida numa partícula por uma esfera uniforme deve possuir a direcção do centro da esfera. A situação seria a mesma se a distribuição da massa da esfera não tivesse simetria esférica?

Q5 - Em que posição da sua órbita elíptica é que po módulo da velocidade de um planeta atinge o máximo? E em que posição atinge o mínimo?

Q6 - Dada a massa e o raio do planeta X, como calcularia a aceleração devida à gravidade na superfície do planeta?

Podemos utilizar a lei de Newton da graviação. O módulo da força de atração gravítica que se exerce sobre sobre um corpo de massa m na superfície do planeta, de massa M e raio R, é

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{R^2}$$

Este valor é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração da gravidade naquele ponto, ou $F_\mathrm{g} = mg$, de onde

$$\begin{aligned} G\frac{mM}{R^2} &= mg \\ g &= G\frac{M}{R^2} \end{aligned}$$

Q7 - Como poderá obter a massa da Lua?

Vamos tentar obter a massa da Lua, utilizando a expressão da força gravítica exercida pela Terra na Lua e a 2.ª Lei de Newton. A trajectóriar da Lua no seu movimento em torno da Terra é aproxidamente circular, sendo o seu movimento circular uniforme. A força centrípeta é a força gravítica da Terra que, em módulo, é

$$F_\mathrm{g} = G\frac{M_\mathrm{L}M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{OL}^2},$$

em que M_L e M_T sáo, respectivamente, as massas da Lua e da Terra, e R_OL é o raio da órbita da Lua. Utilizando agora a 2.ª Lei de Newton,

$$F_\mathrm{g} = M_\mathrm{L}a_\mathrm{c},$$

em que a_c é a aceleração centrípeta da Lua, obtemos

$$G\frac{M_\mathrm{L}M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{OL}^2} = M_\mathrm{L}\frac{v^2}{R_\mathrm{OL}},$$

em que v é o módulo da velocidade (constante) da Lua na sua órbita circular, de raio R_OL. O módulo da velocidade orbital da Lua pode ser escrito na forma

$$v = \frac{2\pi R_\mathrm{OL}}{T},$$

que conduz a

$$\begin{aligned} G\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{OL}} &= \left(\frac{2\pi R_\mathrm{OL}}{T}\right)^2 \\ GM_\mathrm{T} &= \frac{4\pi^2 R_\mathrm{OL}^2}{T^2} \end{aligned}$$

Conhecendo a massa da Terra e o período do movimento orbital da Lua, podemos utilizar esta expressão para obter o raio da órbita da Lua, mas a massa da Lua não entra nesta equação, o que nos leva a concluir que este processo não nos permite obter a massa da Lua.

Se supusermos que a densidade da Lua é igual à da Terra, podemos utilizar a relação entre os volumes, vindo

$$M_\mathrm{L} = \frac{V_\mathrm{L}}{V_\mathrm{T}}M_\mathrm{T}.$$

Esta expressão conduz a um valor aproximado, mas com um erro demasiado grande. Na realidade a densidade média da Lua é cerca de $3/5$ da densidade média da Terra.

Outro processo é medir na superfície da Lua a aceleração da gravidade, g_L, e, conhecendo o raio da Lua e G, utilizar a expressão

$$g_\mathrm{L} = G\frac{M_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2},$$

para obter

$$M_\mathrm{L} = \frac{g_\mathrm{L}R_\mathrm{L}^2}{G}.$$

Na realidade, a Terra e a Lua rodam, efectivamente, em torno da posição do centro de massa do sistema Terra+Lua. Observações astronómicas permitem determinar essa posição, que se encontra no interior da Terra. O conhecimento dessa posição e da massa da Terra permite obter a massa da Lua.

Q8 - Um pequeno projéctil é lançado paralelamente à superfície, a uma altitude $h = 1\,\mathrm{m}$, com velocidade tal que lhe permite permanecer em órbita circular em torno de um planeta perfeitamente esférico sem atmosfera. Um insecto encontra-se numa pequena cavidade no interior do projéctil. O insecto encontra-se em situação de imponderabilidade? Justifique.

Como a única força que actua no projéctil é a força da gravidade resultante do planeta, a aceleração do projéctil é centrípeta e o seu módulo é

$$a_{\mathrm{c}} = G\frac{M}{(R+h)^2},$$

em que M e R são a massa e o raio do planeta, respectivamente. Esta aceleração não depende da massa do projéctil e podemos concluir que é também. a aceleração do insecto. Como o insecto e o projéctil não exercem, portanto, forças entre eles (estamos a desprezar a intensidade da força gravítica entre o insecto e o projéctil, quando comparada com a intensidade das forças gravíticas entre o planeta e o projéctil e entre o planeta e o insecto), podemos afirmar que o insecto está em situação de imponderabilidade (recorde-se que nós não estamos, em geral, em situação de impoderabilidade porque a força que o chão exerce em nós equilibra a força da gravidade. Se estivermos num elevador e o cabo deste se partir, o chão deixa de exercer força em nós e passamos à situação de imponderabilidade. A nossa aceleração será igual à do elevador. Mas é melhor não tentarmos essa experiência num elevador).

Q9 - A nave espacial Voyager foi acelerada pela gravidade de Júpiter de forma a atingir a velocidade de escape em relação ao Sol. Justifique.

Q10 - A nave Apollo 13 teve um problema com o sistema de oxigénio quando ia a meio caminho da Lua. Explique por que é que a missão continuou de forma a que a nave efectuou uma trajectória em torno da Lua, só depois regressando à Terra, em vez de voltar imediatamente para a Terra.

A trajectória da nave estava programada para que ao aproximar-se da Lua, uma pequena diminuição da velocidade (provocada por um fogute) permitisse que a nave ficasse em órbita em torno da Lua. Uma pequena variação do impulso desse foguete permitiu também que a órbita em torno da Lua fosse parabólica e a nave, depois de rodear a Lua, "escapasse para a Terra.

A utilização do foguete para travar a viagem de modo a que a nave voltasse para a Terra imediatamente após o incidente, implicaria um gasto muito maior de combustível do foguete (combustível esse que provavelmente não existia) e uma trajectória de regresso que poderia não permitir um regresso futuro.

Foi assim utilizada, de forma económica, a força gravítica da Lua para permitir que anave seguisse uma trajectória que permitiu o regresso em segurança.

Q11 - De que percentagem é reduzida a aceleração devida à gravidade no equador Terrestre, como resultado da rotação da Terra? Como varia este efeito com a latitude?

Problemas:

P1 - Um satélite de massa m encontra-se numa órbita circular de raio R em torno de um planeta de massa M no plano equatorial do planeta. O satélite está sempre sobre o mesmo ponto do planeta (na Terra chamar-se-ia geoestacionário). Se a aceleração devida à gravidade à superfície do planeta é g, determine:

a) O módulo da velocidade do satélite;

A força centrípeta que actua no satélite é a força gravítica do planeta, pelo que podemos escrever

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R},$$

o que nos permite obter, imediatamente,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

b) O período do satélite;
Se T é o período do movimento orbital do satélite, então

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

e

$$G\frac{M}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

ou

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3$$

c) A energia cinética do satélite;
A energia cinética do seu satélite é

$$\begin{aligned} E_\mathrm{C} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{GmM}{2R} \end{aligned}$$

d) A energia potencial do sistema satélite + planeta;
Esta energia é

$$U_\mathrm{g} = -G\frac{mM}{R}$$

e) O raio do planeta;
A força gravítica à superfície do planeta, de raio r, é

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{r^2} = mg.$$

Como conhecemos g, podemos obter o raio do planeta,

$$r = \sqrt{\frac{GM}{g}}$$

f) O período mínimo possível do movimento do satélite;
O período mínimo possível do movimento do satélite corresponde a $R = r$, ou seja,

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \\ &= 4\pi^2\frac{(GM)^{1/2}}{g^{3/2}} \end{aligned}$$

e

$$T = 2\pi\frac{(GM)^{1/4}}{g^{3/4}}$$

g) O módulo da velocidade de escape do satélite.
O módulo da velocidade de escape do satélite é o módulo da velocidade que o satélite deve possuir à superfície da Terra para atingir uma distância infinita ao planeta com velocidade nula, isto é, para que a energia mecânica a distância infinita seja nula. Como a força gravítica é conservativa, a energia

mecânica é cosntante, o que significa que a energia mecânica à superfície do planeta tem de ser nula, ou

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - G\frac{mM}{r} = 0$$

de que resulta

$$\begin{aligned} v_{\text{esc}} &= \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \\ &= 2^{1/2}(gGM)^{1/4}. \end{aligned}$$

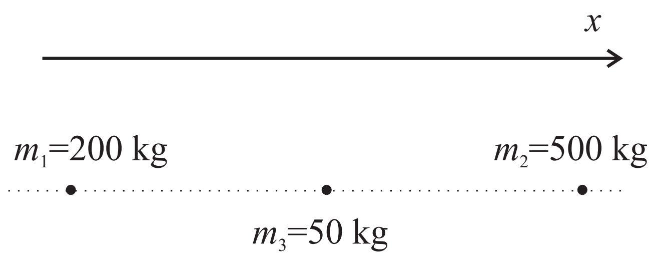
P2. - A caminho da Lua, os astronautas das missões Apollo (nas décadas de 1960 e 1970) passam por um ponto em que a atracção gravítica da Lua é igual à da Terra.

a) Calcule a distância desse ponto ao centro da Terra.

b) Qual é o módulo da aceleração resultante da gravidade da Terra nesse ponto?

P3 - Dois corpos, com massas $200\,\text{kg}$ e $500\,\text{kg}$, respectivamente, distam um do outro de 0.$400\,\text{m}$.

a) Obtenha a força gravítica resultante exercida por estes corpos num terceiro corpo com massa $50.0\,\text{kg}$ colocado no ponto médio entre os dois primeiros.



Utilizando o eixo de referência na figura a força gravítica resultante que se exerce no terceiro corpo é

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} + G\frac{m_2 m_3}{r_{23}^2} \\ &= \frac{6.67259 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}}{(0.200\,\text{m})^2}(-200\,\text{kg} \times 50.0\,\text{kg} + 500\,\text{kg} \times 50.0\,\text{kg}) \\ &= 2.50 \times 10^{-5}\,\text{N} \end{aligned}$$

:

b) Em que posição (não incluindo os pontos a distância infinita) é que o terceiro corpo é actuado por uma força gravítica nula?

Essa posição é dada pela condição de equilíbrio

$$\begin{aligned} -G\frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} + G\frac{m_2 m_3}{r_{23}^2} &= 0 \\ -\frac{m_1}{r_{13}^2} + \frac{m_2}{r_{23}^2} &= 0 \end{aligned}$$

com

$$r_{13} + r_{23} = 0.400\,\text{m}.$$

P4 - a) Calcule a variação absoluta e relativa do módulo da força gravítica que o Sol exerce numa pessoa com massa $50.0\,\text{kg}$, colocada no equador ao meio dia e à meia-noite (Sugestão: Como Δr é pequeno, utilize diferenciais).

O módulo da força gravítica que o sol exerce numa pessoa com massa m ao meio dia é

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{mM_{\mathrm{S}}}{(R_{\mathrm{OT}} - R_{\mathrm{T}})^2},$$

em que R_{OT} é o raio da órbita da Terra e R_{T} é o raio da Terra. À meia noite esse valor será

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{mM_{\mathrm{S}}}{(R_{\mathrm{OT}} + R_{\mathrm{T}})^2}.$$

A variação do módulo da força é muito pequena é muito pequena, porque $R_{\mathrm{T}} << R_{\mathrm{OT}}$ e a distância da pessoa ao Sol varia de $2R_{\mathrm{T}}$.apenas. Vamos então utilizar diferenciais.

A partir de

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{mM_{\mathrm{S}}}{r^2},$$

obtemos

$$dF_{\mathrm{g}} = -G\frac{2mM_{\mathrm{S}}}{r^3}dr,$$

de onde a variação absoluta pedida do módulo da força gravítica é

$$\begin{aligned}
\Delta F_{\mathrm{g}} &= G\frac{2mM_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{OT}}^3}\Delta r \\
&= 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times \\
&\quad \times \frac{2 \times 50.0\,\mathrm{kg} \times 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^3} \times 2 \times 1.70 \times 10^6\,\mathrm{m} \\
&= 1.34 \times 10^{-5}\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

A variação relativa é

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F_{\mathrm{g}}}{F_{\mathrm{g}}} &= \frac{G\frac{2mM_{\mathrm{S}}}{r^3}\Delta r}{G\frac{mM_{\mathrm{S}}}{r^2}} \\
&= \frac{2\Delta r}{r} \\
&= \frac{2 \times 2 \times 1.70 \times 10^6\,\mathrm{m}}{1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}} \\
&= 4.53 \times 10^{-5} \\
&= 0.00453\%.
\end{aligned}$$

Utilizámos:
$M_{\mathrm{S}} = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
$R_{\mathrm{OT}} = 1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$

b) De que percentagem diminui o peso de uma pessoa com massa $50.0\,\mathrm{kg}$, durante um eclipse total do Sol?

Durante um eclipse total do Sol, as forças de atracção gravítica da Lua e do Sol têm o mesmo sentido, portanto os seus módulos somam-se e o resultado é subtraído do módulo da força gravítica da Terra sobre a pessoa.

O módulo da força gravítica da Terra sobre a pessoa é

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{g}} &= G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{R_{\mathrm{T}}^2} \\
&= 6.67259 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times \frac{5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \times 50.0\,\mathrm{kg}}{(1.70 \times 10^6\,\mathrm{m})^2} \\
&= 6.90 \times 10^3\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

O módulo da resultante das forças de atracção gravítica da Lua e do Sol sobre a pessoa, actuando concorrentemente é

$$\begin{aligned} F'_{\rm g} &= G\left[\frac{mM_{\rm L}}{(R_{\rm OL}-R_{\rm T})^2}+\frac{mM_{\rm S}}{R_{\rm OT}^2}\right] \\ &= 6.67259\times 10^{-11}\,{\rm m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\times \\ &\quad\times\left[\frac{50.0\,{\rm kg}\times 7.55\times 10^{22}\,{\rm kg}}{(3.84\times 10^{8}\,{\rm m}-1.70\times 10^{6}\,{\rm m})^2}+\frac{50.0\,{\rm kg}\times 1.99\times 10^{30}\,{\rm kg}}{(1.50\times 10^{11}\,{\rm m})^2}\right] \\ &= 0.297\,{\rm N} \end{aligned}$$

A variação relativa do peso é

$$\begin{aligned} \frac{F'_{\rm g}}{F_{\rm g}} &= \frac{0.297\,{\rm N}}{6.90\times 10^{3}\,{\rm N}} \\ &= 4.30\times 10^{-5} \\ &= 4.30\times 10^{-3}\%. \end{aligned}$$

P5 - A Lua dista $384400\,{\rm km}$ **do centro da Terra e completa um órbita em** 27.3 **dias.**

a) Determine o módulo da velocidade orbital da Lua.

Mais uma vez, utilizamos o facto de a força centrípeta que actua na Lua ser a força de atracção gravítica da Terra,

$$G\frac{M_{\rm L}M_{\rm T}}{R_{\rm OL}^2}=\frac{M_{\rm L}v^2}{R_{\rm OL}},$$

em que v é o módulo da velocidade orbital da Lua. Resulta

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{G\frac{M_{\rm T}}{R_{\rm OL}}} \\ &= \sqrt{6.67\times 10^{-11}\,{\rm m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\times\frac{5.98\times 10^{24}\,{\rm kg}}{3.844\times 10^{8}\,{\rm m}}} \\ &= 1.02\times 10^{3}\,{\rm m/\,s}. \end{aligned}$$

Este valor pode também ser obtido, considerando que a Lua percorre uma órbita completa em cerca de 29.5 dias. Assim, o módulo da velocidade orbital é igual ao perímetro da órbita a dividir por 29.5 dias,

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi R_{\rm OL}}{T} \\ &= \frac{2\pi\times 3.844\times 10^{8}\,{\rm m}}{29.5\,{\rm d}\times 24\,{\rm h/\,d}\times 3600\,{\rm s/\,h}} \\ &= 0.95\times 10^{3}\,{\rm m/\,s}, \end{aligned}$$

que é aproximadamente igual ao valor obtido acima.

b) De que distância "cai" a Lua para a Terra em $1.00\,{\rm s}$**?**

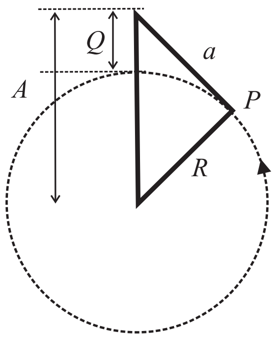
O módulo da aceleração devida à gravidade da Terra na posição em que se encontra a Lua é

$$\begin{aligned} g &= G\frac{M_{\rm T}}{R_{\rm OL}^2} \\ &= 6.67\times 10^{-11}\,{\rm m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\times\frac{5.98\times 10^{24}\,{\rm kg}}{(3.844\times 10^{8}\,{\rm m})^2} \\ &= 2.70\times 10^{-3}\,{\rm m/\,s^2} \end{aligned}$$

Utilizando agora a expressão das posições no movimento uniformemente acelerado unidimensional, $y = \frac{1}{2}gt^2$, podemos calcular a distância de que a Lua "cai"num segundo, obtendo o valor de y para $t = 1.00\,\mathrm{s}$, que resulta em

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} 2.70 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/\,s^2} \times (1.00\,\mathrm{s})^2 \\ &= 1.35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Podemos comparar este valor com o que obtemos por outro processo. Considerando a figura seguinte, se não existisse a gravidade da Terra a Lua, a partir do ponto P seguiria uma trajectória rectilínea e não a órbita circular. A distância de que a Lua cai para a Terra quando se desloca de uma distância a é dada por Q (as dimensões do triângulo rectângulo da figura estão, evidentemente exageradas).



Podemos estimar o valor de Q, considerando as relações entre os lados do triângulo rectângulo,

$$A^2 = R^2 + a^2$$

e

$$Q = A - R.$$

Nestas equações R é o raio da órbita da Lua e a é a distância que a Lua percorre num segundo. Esta distância pode ser estimada a partir da velocidade orbital da Lua,

$$\begin{aligned} a &= v \times 1.0\,\mathrm{s} \\ &= 1.02 \times 10^3\,\mathrm{m/\,s} \times 1.0\,\mathrm{s} \\ &= 1.02 \times 10^3\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$A = \sqrt{a^2 + R^2}$$

e

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{a^2 + R^2} - R \\ &= \sqrt{(1.02 \times 10^3\,\mathrm{m})^2 + (3.844 \times 10^8\,\mathrm{m})^2} - 3.844 \times 10^8\,\mathrm{m} \\ &= 1.\,35 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

que coincide com o valor apresentado acima

P6 - Io, uma pequena lua de Júpiter, tem um período orbital de 1.77 dias e o raio da sua órbita é $4.22 \times 10^5\,\mathrm{km}$. Utilizando estes dados, obtenha a massa de Júpiter.

Utilizamos a expressão, já encontrada,

$$v = \sqrt{G\frac{M_{\mathrm{J}}}{R_{\mathrm{O_{Io}}}}}$$

e

$$v = \frac{2\pi R_{\mathrm{O_{Io}}}}{T}$$

com

$$\begin{aligned} T &= 1.77\,\mathrm{d} = 1.77\,\mathrm{d} \times 24\,\mathrm{h/\,d} \times 3600\,\mathrm{s/\,h} \\ &= 1.\,53 \times 10^5\,\mathrm{s}, \end{aligned}$$

obtendo

$$\frac{4\pi^2 R_{\mathrm{O_{Io}}}^2}{T^2} = G\frac{M_{\mathrm{J}}}{R_{\mathrm{O_{Io}}}},$$

ou

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{J}} &= \frac{4\pi^2 R_{\mathrm{O_{Io}}}^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \left(4.22 \times 10^5\,\mathrm{km}\right)^3}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times (1.\,53 \times 10^5\,\mathrm{s})^2} \\ &= 1.90 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

P7 - Um satélite da Terra tem massa $100\,\mathrm{kg}$ e encontra-se a uma altitude de $2.00 \times 10^6\,\mathrm{m}$. a) Qual é a energia potencial do sistema satélite+Terra? (Suponha $U_{\mathrm{g}} = 0$ para $r = \infty$.) b) Qual é o módulo da força gravítica exercida pela Terra neste satélite?

P8 - Qual é o trabalho exercido pela força gravítica da Lua sobre um meteoro com massa $1000\,\mathrm{kg}$, que vem do espaço exterior esmagar-se na superfície da Lua?

O trabalho exercido é igual ao negativo da diferença de energia potencial gravítica entre o sistema Lua+meteoro quando este está na superfície da Lua e quando os dois corpos estão a uma distância infinita um do outro (este último valor é nulo). Consequentemente, o trabalho pedido é

$$W = G\frac{M_{\mathrm{L}} m}{R_{\mathrm{L}}},$$

em que m é a massa do meteoro. Obtemos, então,

$$\begin{aligned} W &= 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \frac{7.55 \times 10^{22}\,\mathrm{kg} \times 1000\,\mathrm{kg}}{6.40 \times 10^6\,\mathrm{m}} \\ &= 7.\,87 \times 10^8\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

P9 - Qual é a quantidade de energia necessária para mover um corpo de massa m desde a superfície da Terra até à altitude h?

P10 - Após ter esgotado o seu combustível nuclear, o destino final do nosso Sol será, muito provavelmente, colapsar numa anã branca. Esta é uma estrela com a massa do Sol e um raio igual ao da Terra. Calcule:

a) A massa volúmica média da anã branca;
Esta massa volúmica é

$$\begin{aligned}\rho_{\text{anã branca}} &= \frac{M_{\text{S}}}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{T}}^3} \\ &= \frac{3\times 1.99\times 10^{30}\,\text{kg}}{4\pi\left(1.70\times 10^{6}\,\text{m}\right)^3} \\ &= 9.7\times 10^{10}\,\text{kg/ m}^3\end{aligned}$$

b) A aceleração resultante da gravidade à sua superfície;
Temos

$$\begin{aligned}g &= G\frac{M_{\text{S}}}{R_{\text{T}}^2} \\ &= 6.67\times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}\frac{1.99\times 10^{30}\,\text{kg}}{\left(1.70\times 10^{6}\,\text{m}\right)^2} \\ &= 4.5\times 10^{8}\,\text{m/ s}^2,\end{aligned}$$

7 ordens de grandeza superior à aceleração devida à gravidade à superfície da Terra.

c) A energia potencial gravítica de um objecto com massa $1.00\,\text{kg}$ na sua superfície.
Esta energia é dada por

$$U_{\text{g}} = G\frac{M_{\text{S}}m}{R_{\text{T}}},$$

com $m = 1.00\,\text{kg}$, ou

$$\begin{aligned}U_{\text{g}} &= 6.67\times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}\frac{1.99\times 10^{30}\,\text{kg}\times 1.00\,\text{kg}}{1.70\times 10^{6}\,\text{m}} \\ &= 7.8\times 10^{13}\,\text{J}.\end{aligned}$$

P11 - Calcule o módulo da velocidade de escape para um foguete na superfície de Ganimedes, no lado oposto ao de Júpiter. Ganimedes, o maior satélite de Júpiter, tem raio igual a $2.64\times 10^{6}\,\text{m}$ e massa igual a $1.495\times 10^{23}\,\text{kg}$. A massa de Júpiter é $1.90\times 10^{27}\,\text{kg}$ e a distância entre Júpiter e Ganimedes é $1.071\times 10^{9}\,\text{m}$. Não se esqueça de incluir o efeito gravítico de Júpiter, mas pode desprezar os movimentos de rotação de Júpiter e Ganumedes e torno dos respectivos centros de massa.

A velocidade de escape pode ser obtida igualanado a zero a energia mecânica do sistema quando o fogute parte da superfície de Ganimedes com $v = v_{\text{esc}}$. Neste caso, é necessário acrescentar à energia potencial gravítica resultante da interacção foguete+Ganimedes a energia potencial gravítica resultante da interacção foguete+Júpiter, ambas à superfície da Ganimedes. Encontramos, assim, se o fogute tem massa m,

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - G\frac{mM_{\text{G}}}{R_{\text{G}}} - G\frac{mM_{\text{J}}}{R_{\text{OG}}+R_{\text{G}}} = 0,$$

em que M_{G} e M_{J} são, respectivamente, as massas de Ganimedes e de Júpiter, R_{G} é o raio de Ganimedes e R_{OG} é o raio da órbita de Ganimedes (assim $R_{\text{OG}}+R_{\text{G}}$ é a distância inicial do foguete ao centro de

Júpiter). Obtemos

$$
\begin{aligned}
v_{\text{esc}} &= \sqrt{2G\left(\frac{M_{\text{G}}}{R_{\text{G}}} + \frac{M_{\text{J}}}{R_{\text{OG}} + R_{\text{G}}}\right)} \\
&= \sqrt{2 \times 6.67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}} \times \\
&\quad \times \sqrt{\frac{1.495 \times 10^{23}\,\text{kg}}{2.64 \times 10^{6}\,\text{m}} + \frac{1.90 \times 10^{27}\,\text{kg}}{1.071 \times 10^{9}\,\text{m} + 2.64 \times 10^{6}\,\text{m}}} \\
&= 1.56 \times 10^{4}\,\text{m/s}.
\end{aligned}
$$

P12 - Um foguete é disparado na vertical, ejectando massa suficiente para se mover com aceleração constante igual a $2g$. Após $40.0\,\text{s}$, o combustível esgota-se e o foguete desloca-se apenas sob a acção da gravidade, com resistência do ar desprezável. Ignore a variação de $\vec{g}$ com a altitude e a variação da massa do foguete.

a) Calcule a altitude máxima atingida pelo foguete.

b) Calcule o tempo de voo total do foguete desde que é lançado até tocar de novo a Terra.

c) Esboce um gráfico qualitativo da variação da velocidade do foguete em função do tempo para a duração total do voo.

Sugestão: Este problema é essencialmente um problema de cinemática num movimento unidimensional. Até o combustível se esgotar, o movimento é na vertical, no sentido ascendente, com aceleração constante $a = 2g$. Após o esgotamento do combustível o movimento é ainda uniformemente acelerado mas agora a aceleração é $-g$ (o sinal - resulta de estarmos a considear positivo o sentido "para cima"). Imediatamente após o esgotamento do combustível o foguete continua a subir porque tem velocidade não nula dirigiada para cima.